

יסודות הסטטיסטיקה לגיאוגרפים

פרק 22 - בדיקת השערות על פרופורציה

תוכן העניינים

1. התהליך.....1
2. קביעת גודל מדגם.....4
3. מובהקות התוצאה - אלפא מינימלית.....6

התהליך:

רקע:

השערת האפס: השערת האלטרנטיבית:	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  דוחים את H_0	או $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה – אזור הדחייה של H_0 :		
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
- (2) במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
- (3) הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?
- (4) קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.
 - א. רשמו את ההשערות.
 - ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.
 - ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?
- (5) חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
 - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
 - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.
- (6) שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות: $H_0: p = p_0$, $H_1: p > p_0$. חוקר א' השתמש ברמת מובהקות α_1 וחוקר ב' ברמת מובהקות α_2 החוקר הראשון דחה את H_0 ואילו החוקר השני קיבל את H_0 . שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:
 - א. $\alpha_1 = \alpha_2$.
 - ב. $\alpha_1 > \alpha_2$.
 - ג. $\alpha_1 < \alpha_2$.
 - ד. המצב המתואר לא אפשרי.

תשובות סופיות:

- (1) נדחה H_0 .
- (2) נדחה H_0 .
- (3) נקבל H_0 .
- (4) א. $H_0: p = 0.2$
 ב. $H_1: p \neq 0.2$
 ג. המסקנה לא תשתנה.
- (5) א. נדחה H_0 .
 ב. המסקנה לא תשתנה.
- (6) ג'.

קביעת גודל מדגם:

רקע:

השערות המחקר הן: $H_0: p = p_0$, $H_1: p = p_1$: מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β .

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי:

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\alpha} \sqrt{p_0 q_0} + Z_{1-\beta} \sqrt{p_1 q_1}}{p_0 - p_1} \right)^2$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

רוצים לבדוק האם אחוז האנשים השוהים בשמש ללא הגנה ירד בעקבות הפרסומת על נזקי השמש.
 בעבר 60% מהאוכלוסייה שהתה בשמש ללא הגנה. מה גודל המדגם המינימלי שיש לקחת כדי לבדוק שהאחוז הנ"ל ירד ל-48% אם מעוניינים שהסיכוי לטעות מסוג ראשון יהיה 5% והסיכוי לטעות מסוג שני יהיה 1%?

שאלות:

- (1) משרד התמ"ת פרסם שאחוז האבטלה במשק היום עומד על 8%. לעומתו, משרד הפנים טוען שחלה עלייה בשיעור האבטלה עד לכדי 11%. כדי לבדוק מי מבניהם צודק, מה צריך להיות גודל המדגם שיענה על שני התנאים הבאים:
- א. אם משרד התמ"ת צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 10%.
- ב. אם משרד הפנים צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 4%.
- (2) מפעיל קזינו מפרסם שהסיכוי לזכות במכונת מזל הינו 0.42. אדם טוען שהסיכויים לזכות במשחק נמוכים יותר. כמה פעמים יש לשחק את המשחק כדי שאם טענת מפעיל הקזינו נכונה נקבל את טענת האדם בסיכוי של 1% ואם במציאות הסיכוי לזכות במכונה הוא 0.3 נקבל את מפעיל הקזינו בסיכוי של 8%?

תשובות סופיות:

(1) .891

(2) .224

מובהקות התוצאה – אלפא מינימלית:

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה: באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות. המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם $p_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 .

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \& n(1-p_0) \geq 5$		
p-value	$P_{H_0}(\hat{p} \geq \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{p} \leq \hat{p})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{p} \geq \hat{p}) \Leftarrow \hat{p} > p_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{p} \leq \hat{p}) \Leftarrow \hat{p} < p_0$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$

התקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.
א. מהי מובהקות התוצאה?
ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?
- (2) נהוג לחשוב ש-60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש-41 קמו במהלך הלילה.
א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?
ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?
ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?
ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?
- (3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש-60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.
- (4) בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$.
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 5%:
(בחרו בתשובה הנכונה)
א. יקבל את השערת האפס
ב. ידחה את השערת האפס.
ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (5) קבעו אם הטענה הבאה נכונה:
"במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך $p\text{-value}$ של 3%,
לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי),
היינו מקבלים ערך $p\text{-value}$ של 6%".
- (6) במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה. לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0455.
 ב. ברמת מובהקות של 1% : לא דוחים את H_0 .
 ברמת מובהקות של 5% : נדחה את H_0 .
- (2) א. 0.0548. ב. 0.0548. ג. מעל 0.0548.
 ד. נכריע לטובת טענת המחקר.
- (3) $p_v = 0$, נדחה את H_0 .
- (4) ב'.
- (5) הטענה נכונה.
- (6) 0.7486.